Was macht eigentlich die Mathematik?

Ein kleiner Aufsatz von Ulrich H. Baselau

Es gibt keine Eigenschaft ohne Objekt. Grüne Pullover gibt es und die grünende Flur und grüne Lackfarbe. Aber Grün? Genau davon handelt die Mathematik: Sie arbeitet mit Eigenschaften ohne Objekte, und das geht ja schon mal gar nicht. Wer so anfängt, darf sich alles erlauben.

Drei Bleistifte haben mit drei indischen Elefanten und drei Häuschen nicht sehr viel gemeinsam, lediglich eine Eigenschaft: Drei. Die Entwicklung geht so: Zunächst wird mit diesen Eigenschaften ein wenig „gespielt“ bis man dabei zu einer Ordnung kommt. Man findet die Kriterien „ist größer als“, „ist kleiner als“, ist „gleichgroß“. So hat man Struktur in einer Menge dieser Eigenschaften, die man „natürliche Zahlen“ nennt. Nun bedarf es noch einer anständigen Schreibweise (10 Zeichen reichen für uns aus, der Computer braucht sogar nur 2 Zeichen) und schon ist man mittendrin. Man macht etwas, weil man es machen kann. Mathematik ist also ein völlig sinnfreies Spielen mit etwas, das es gar nicht gibt.

Man definiert Verknüpfungen und schaut, was dabei heraus kommt. Den beiden Guten (plus und mal) stehen die beiden Schlechten gegenüber, die durch die Umkehrung entstanden sind. Während nämlich die ersten brav innerhalb der Menge bleiben, die man natürliche Zahlen nannte, brechen die beiden anderen mehr und mehr aus. Man ist also gezwungen aufzugeben, oder seinen Bereich zu erweitern. Die Lösung der Aufgabe „Wenn drei Menschen im Raum sind und fünf gehen hinaus, dann müssen zwei zurückkommen, damit niemand im Raum ist.“ führt zu den „Ganzen Zahlen“ (positive, negative und die Null), die andere (3 geteilt durch 5) erweitert den Zahlenbereich noch einmal: die „Rationalen Zahlen“ kennen als Lösung einen Bruch (drei Fünftel), aber auch die Umwandlung in einen Dezimalbruch (0,6). Mit diesen neuen Zahlen umgehen wir die beiden „schlechten“ Verknüpfungen, aus $3 - 5$ wird $3 + (-5)$ und aus $3 : 5$ wird $3 \cdot (0{,}2)$. Voila!

Weiterspielen? Klar! Welche Menge ist denn größer: N, Z oder Q? Allgemeine Antworten wie „Unendlich ist unendlich!“ helfen kaum. Wir haben beim ersten Spielen ein ganz sicheres System für Größenvergleiche gefunden, das Zuordnen. Wenn wir jeder natürlichen Zahl ganz genau eine ganze Zahl zuordnen können und keine übrig bleibt und keine vergessen wird, dann sind sie gleichgroß, ansonsten… Das gelingt (1❤(0) , 2❤(+1) , 3❤(−1) , 4❤(+2) , 5❤(−2) usw.), keine Zahl wird vergessen, jede hat genau eine zum Anfassen. Ähnliches kann man mit den natürlichen und den rationalen Zahlen durchführen (das sogenannte Diagonalverfahren), sodass deutlich wird: Alle drei Mengen sind gleich groß! ($\aleph_0$ sprich: Aleph 0)

Dass wir aus Gründen der Praktikabilität die Vermischung von Vor- und Rechenzeichen vornehmen, hilft beim Rechnen in der Welt der Wirklichkeit. In der Welt der Mathematik ist dies ein mittlere Katastrophe, denn die (+3) ist keine Eigenschaft, sie ist ein Pfeil mit einer bestimmten Länge, der hinsichtlich der Zahlengerade nach rechts zeigt. Aber wir wollen hier mal gnädig sein mit der Wirklichkeit, die ja bekanntermaßen sowie nur „ungefähr“ ist, je nach unserem Anspruch an Genauigkeit, während die Mathematik, die ja nur ein Gedankenspiel ist, sich das Adjektiv „genau“ anheften kann. Aber das ist ein anderer Aufsatz.

Fertig? Nein, denn bald nachdem die beiden Umkehraufgaben zu neuen Mengen führte, tritt dieses Phänomen noch einmal auf, und dann noch einmal. Zum ersten: Sokrates fragt den Sklaven, wie lang die Seite des „vierfüßigen“ Quadrats sei. Zwei, antwortet richtig dieser. Wie lang aber ist die des doppelt so großen Quadrates? Der Sklave antwortet natürlich fälschlicherweise zunächst „Vier“, muss dann aber erkennen, dass die Seite mit 4 Fuß das 16-füßige Quadrat ergibt. Kurz: Dem Sklaven wird bewusst, dass wir wohl über die Diagonale das doppelt so große Quadrat herstellen können, zugleich aber nicht wissen, wie lang die Quadratseite ist.

Das Problem der Inkommensurabilität von Seitenlängen (es gibt keine gemeinsame Einheit – und sei sie noch so klein) führt direkt zu den „irrationalen" Zahlen. Wir heutigen Menschen wissen natürlich, dass die Seite $\sqrt{8}$ lang ist, aber der Sklave musste das eben erst lernen.

Nun haben diese neuen Zahlen eine erstaunliche Eigenschaft. Sucht man sie auf dem Zahlenstrahl, so findet man sie nicht. Es ist leicht zu zeigen, dass der Zahlenstrahl mit den rationalen Zahlen „dicht" geworden ist. Wo sollten sich dort denn noch neue Zahlen verstecken? Und dennoch sind sie da. Ich verkürze hier mal ein wenig, denn so richtig fertig werden wir mit den neuen Zahlen eh nicht; nicht umsonst heißen die neu dazugekommenen „irrational", obwohl wir der neuen Menge den Namen „Reelle Zahlen" gaben. Die neue Menge ist deutlich größer als die von N=Z=Q ($\aleph_0$), also „unendlicher als die alten unendlich großen Mengen". Und als ob es noch nicht genug sei, muss auch hier noch ein Problem mit wieder neuen Zahlen gelöst werden. Unter dem Wurzelzeichen durfte bis jetzt nur eine nicht-negative Zahl stehen. Mit der Einführung der „Komplexen Zahlen" ($\sqrt{-1}$ = i wie imaginär) lösen wir auch dies Problem.

Allein die Null bereitet uns nach wie vor Sorgen, denn sie ist auch mit Tricks nicht zu bewegen, als Divisor völlig zu versagen. Wie soll die Probe von 5:0 denn aussehen? Wie viel mal 0 ergibt denn 5? Oder noch schlimmer. 0:0=17, denn … (Die Probe bestätigt meine Lösung! Aber auch deine, aber auch jede andere.) Newton wie Leibniz fanden je einen genialen Weg, das Teilen durch null hinsichtlich des Sekanten- / Tangentenproblems zu lösen. Aber das ist schon wieder ein anderer Aufsatz.

Wie schön muss es sein, sich Mathematiker nennen zu dürfen. Die können machen, was sie wollen – ohne dass es üble Auswirkungen auf die Wirklichkeit hat. Das soll mal ein Naturwissenschaftler von sich behaupten oder ein Rhetoriker oder ein Politiker oder … (uhb 2006-02-14)